Definizioni basilari di funzione.

Una funzione per definizione e' una legge

che ad ogni elemento di un insieme (detto **dominio** ed indicato con D) associa

un unico elemento di un secondo insieme (il **codominio**)

Esempio 1:

la legge che a ciascuna persona nata nel 2000 associa il loro giorno e mese di nascita
il dominio

D= persone nate nel 2000

il codominio e' una coppia di numeri (giorno e mese di nascita)

Esempio 2:

a ciascuna persona associa il suo codice fiscale.

Il codominio e' una stringa di 15 lettere e numeri.

Esempio 3:

a ciascun numero reale x associo il suo quadrato $f: x \to x^2$

Dominio = R (reali)

codominio = R (reali)

L'**immagine della funzione** (indicata con f(D)) sono quegli elementi del codominio che sono f(x) per un qualche x del dominio.

Quindi un y_0 nel codominio e' nell'immagine se **esiste un elemento** (denotiamolo con x_0) del dominio per cui **$y_0 = f(x_0)$**.

Nell'esempio 1.
L'immagine sono quelle date (giorno, mese, anno=2000) in cui e' effettivamente nato qualcuno.

Nell'esempio 2. L'immagine sono I codici fiscali emessi

Nell'esempio 3. L'immagine sono I numeri reali non negativi.

Grafico di una funzione reale a valori reali

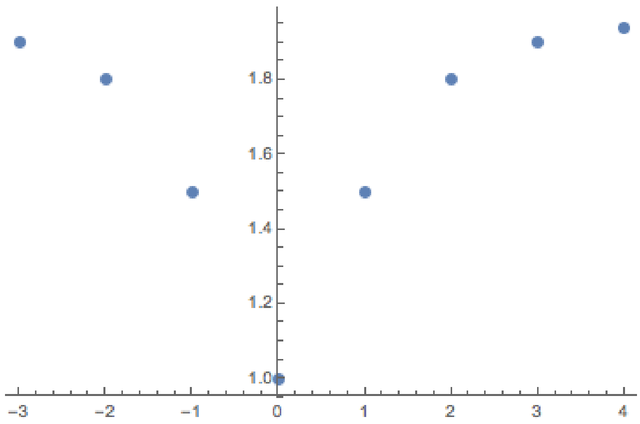
Un modo efficace per descrivere una funzione reale a valori reali (dominio R e codominio R) e' tramite il suo grafico (disegnato nel piano cartesiano)

grafico di f sono i punti (x,y) del piano cartesiano tali che x e' nel dominio e $y=f(x)$

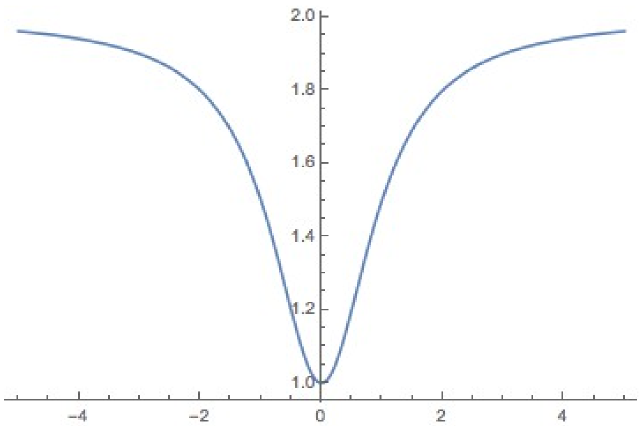
le funzioni di cui ci occuperemo hanno dei grafici che sono curve sul piano cartesiano.

Data l'espressione analitica di una funzione (esempio: f: $x \to (2x^2+1)/(x^2+1)$) potete produrre un grafico approssimato valutando la funzione in un certo numero di punti (per esempio $(x_0,x_1,x_2,\dots,x_n)$ e disegnando i corrispondenti punti $(x_i,f(x_i))$ sul piano cartesiano.

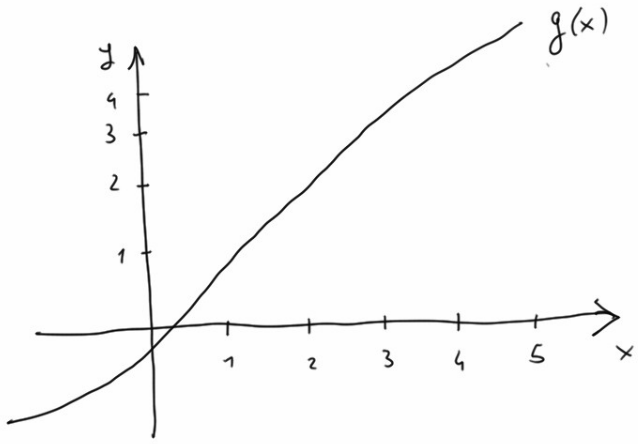
x	f(x)
1	1,5
-1	1,5
2	1,8
-2	1,8
3	1,9
-3	1,9
4	1,94



Naturalmente per avere una buona rappresentazione della funzione bisognerebbe calcolare il valore su tanti punti. Provate a plottare il grafico della funzione con un programma al computer.



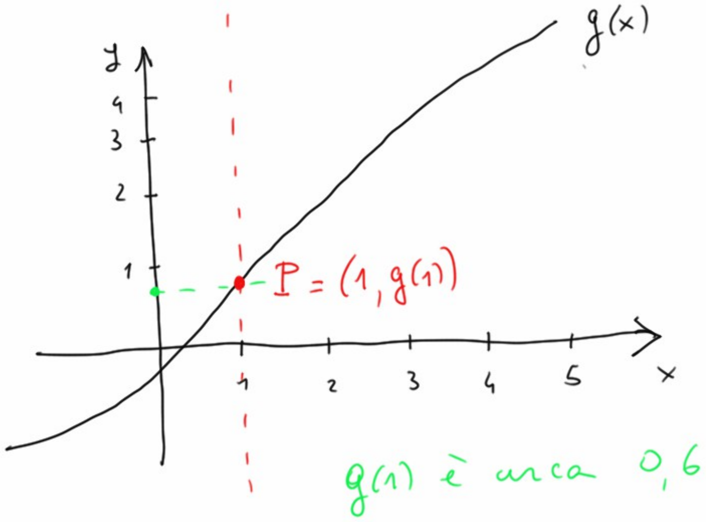
A volte invece di un'espressione analitica vi puo' essere fornito direttamente il grafico. In questo caso potete determinare il valore della funzione in un dato punto x usando il grafico:
Per esempio se il grafico della funzione g(x) e' dato dal disegno sotto determinare g(1)



Si tratta di trovare il punto **sul grafico** di **ascissa = 1**

Traccio la retta verticale di ascissa =1
(i punti su tale retta sono tutti i punti del piano che hanno ascissa =1)

Trovo l'intersezione di tale retta con il grafico. Questo e' un punto P del piano cartesiano.
(Dato che il punto e' sulla retta la sua ascissa =1; dato che P e' sul grafico P= (x,g(x)) con x=1.
Quindi la sua ordinata = g(1).

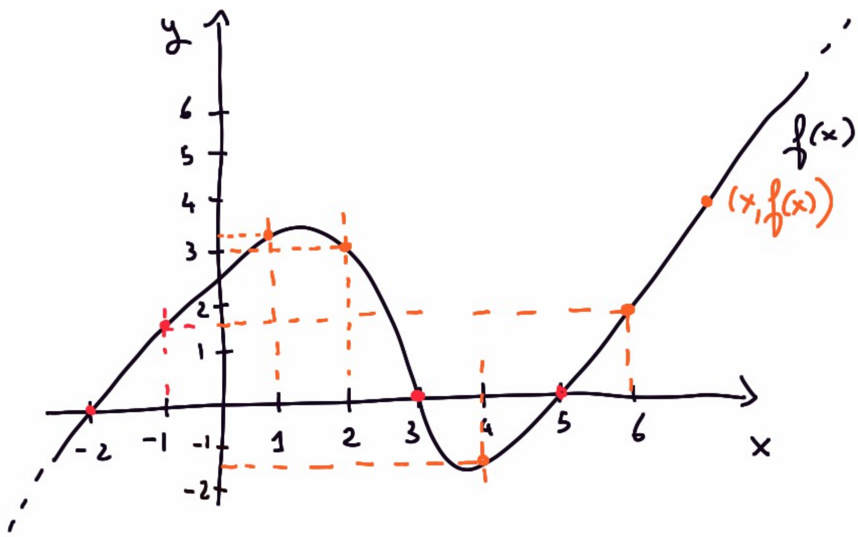


L'ordinata di P e' g(1)

Sapete determinare ascissa ed ordinata di un dato punto del piano?

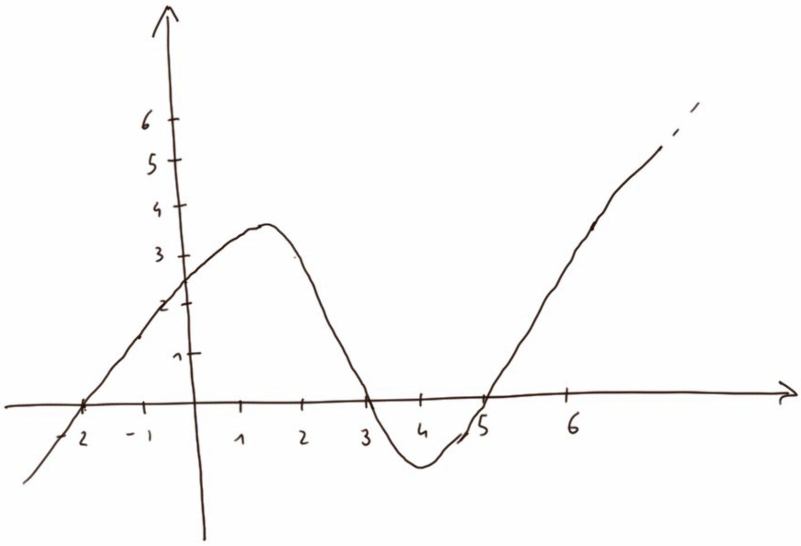
Ecco qui un esempio.   Ho usato un grafico per calcolare il valore di f(x) in vari punti.

X	f(x)
1	3,3
2	3
3	0
-1	1,5
-2	0
4	-1,2
5	0
6	1,5



Domanda 2

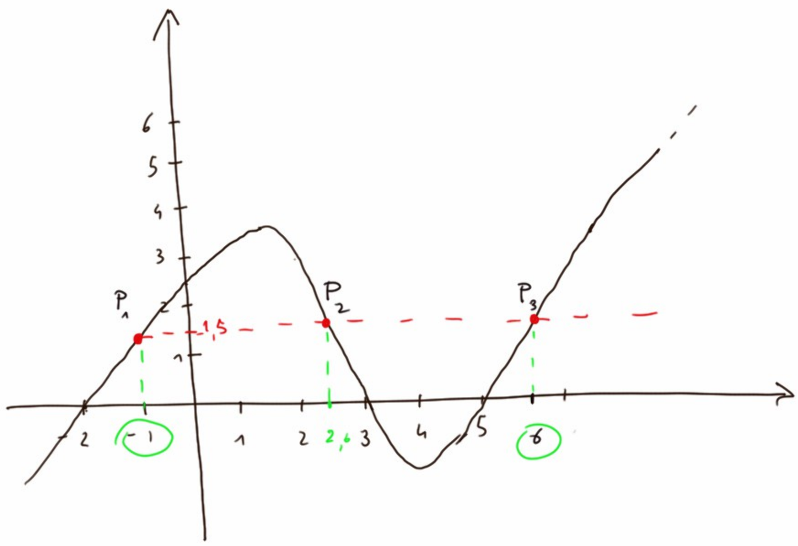
Dato il grafico disegnato sotto determinare gli x tali che f(x)=1,5



devo trovare i punti **sul grafico** la cui ordinata **= 1,5** e determinarne **l'ascissa**

Traccio la retta orizzontale di ordinata =1,5

(i punti su tale retta sono tutti i punti del piano che hanno ordinata =1,5)



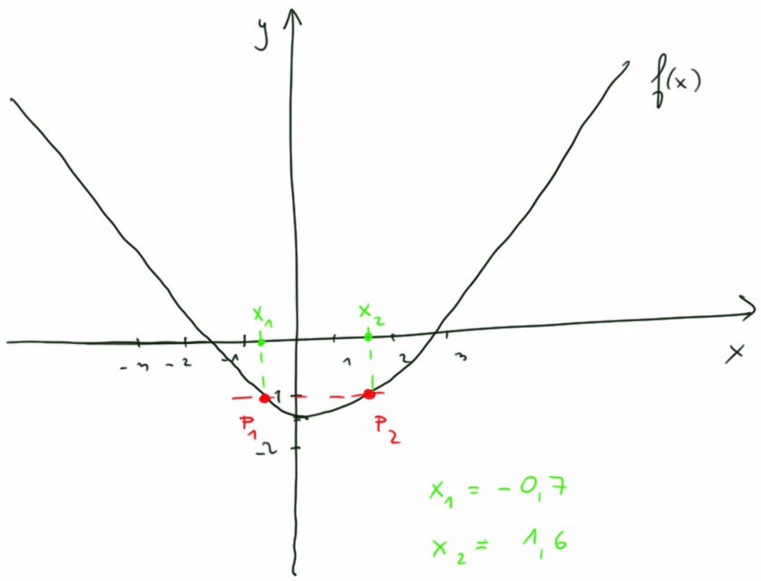
Trovo l'intersezione di tale retta con il grafico. Ottengo (in questo caso particolare)

tre punti P_1, P_2, P_3 del piano cartesiano.

(Dato che i punto sono sulla retta orizzontale la loro ordinata =1,5 ; dato che sono sul grafico sono della forma $P_i=(x_i,f(x_i))$ con $f(x_i)=1,5$

la risposta e' quindi che gli **x per cui f(x)=1,5** sono x_1= **-1** , x_2= **2,4** , x_3= **6** .

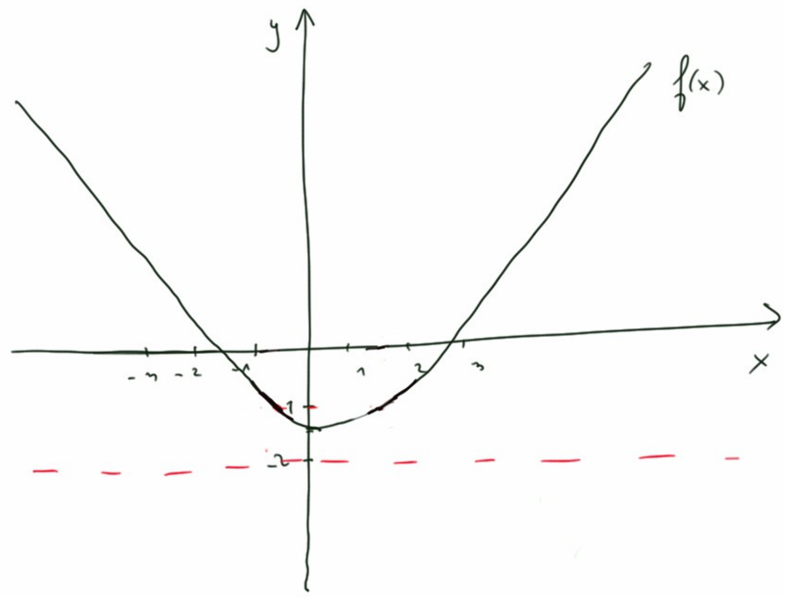
Un altro esempio: Dato il grafico disegnato sotto, determinare gli x tali che f(x)=-1.



Seguo la procedura di prima e trovo due intersezioni, quindi due valori di x.

Ora voglio trovare gli x tali che f(x)=-2.

Ripeto lo stesso gioco ma **non ottengo intersezioni.**
Questo vuol dire che **non esistono x tali che f(x)=-2.** Quindi **-2 non e' nell'immagine.**



Dal disegno vedo che l'immagine f(R) e' $[-3/2,\infty)$ Infatti per qualsiasi valore $y \geq -3/2$ trovo dei valori di x tali che f(x)=y . Per qualsiasi valore $y< -3/2$ non trovo piu' intersezioni.

Funzioni non definite su tutto R

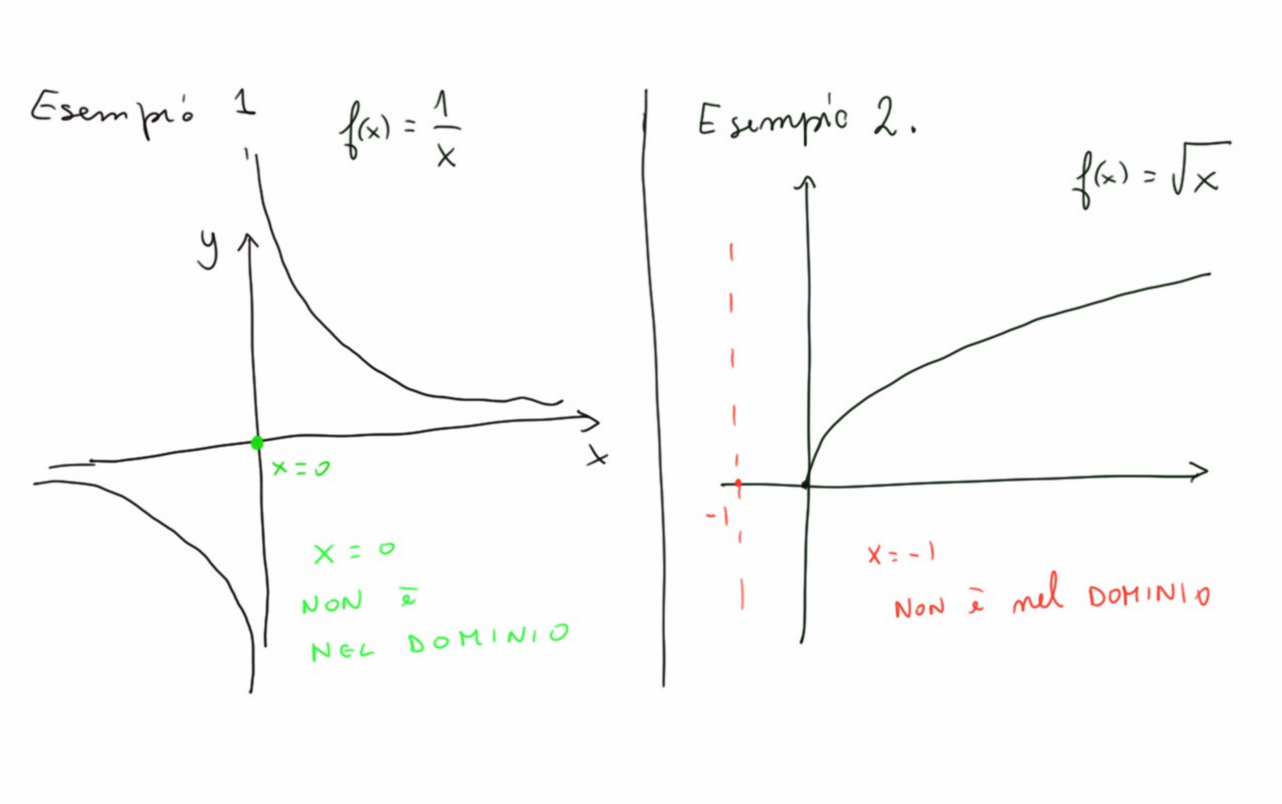
E' possibile che una data funzione non si possa definire per tutti gli x reali.

Esempio 1: $x \to 1/x$ e' definita solo se $x \neq 0$.

Esempio 2: $x \to \sqrt{x}$ e' definita solo se $x \geq 0$.

Il dominio e' l'insieme degli x su cui si puo' definire la funzione.

Esempio 1. D= gli x in R tali che $x \neq 0$
Esempio 2. D= gli x in R tali che $x \geq 0$.



Se vi viene fornito direttamente un grafico potete vedere che x_0 **non e' nel dominio** se seguendo la procedura per determinare f(x) non trovate **nessuna intersezione** fra la retta verticale di ascissa x_0 e il grafico della funzione.

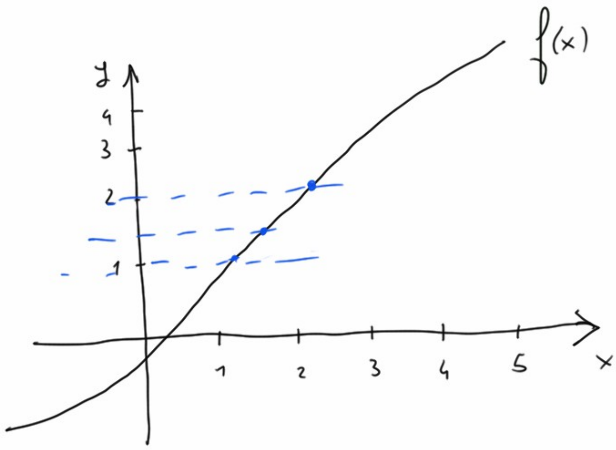
Funzione iniettiva

Una funzione si dice **iniettiva** se per ogni coppia di punti $x_1 \neq x_2$ nel dominio si ha che $f(x_1) \neq f(x_2)$

questo vuol dire che **per ogni y** esiste **al piu' un x** tale che **y= f(x)**.

Quindi scelto un qualsiasi valore sulle ordinate si traccia la retta orizzontale corrispondente e si deve trovare **al piu' una intersezione col grafico .**

Esempio



In questo caso possiamo pensare alle ordinate come variabili indipendenti e determinare le ascisse. Dato un y nell'immagine posso associare ad y l'unico valore x tale che f(x)=y. Posso indicare tale punto con **$x= f^{(-1)}(y)$**

Anche questa e' una legge ben definita. Questa funzione si chiama la **funzione inversa.**

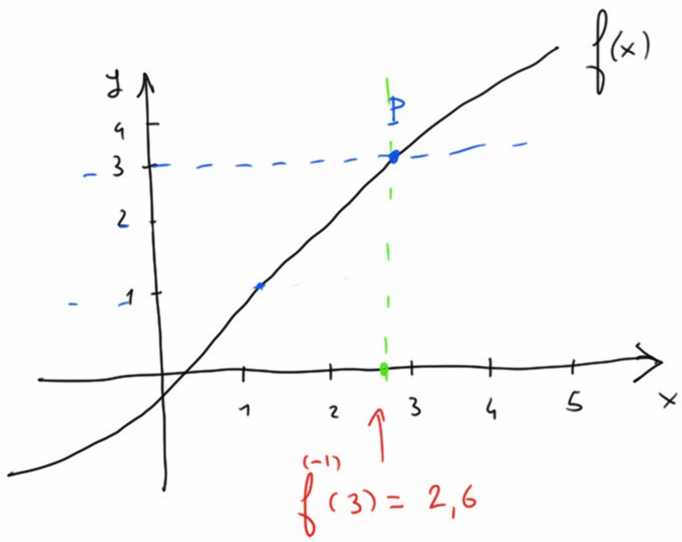
$y \rightarrow f^{(-1)}(y)$.

Se ci viene fornito il grafico di una funzione iniettiva dato un **y nell'immagine** possiamo determinare il valore di **$f^{(-1)}(y)$.**

Per esempio determiniamo sul grafico disegnato sotto **$f^{(-1)}(3)$.**

Devo trovare quell'**unico x** tale che **f(x)=3.**

Procedo come nella domanda 2.



Traccio la retta orizzontale di ordinata =3
(i punti su tale retta sono tutti i punti del piano che hanno ordinata =1,5)

Trovo l'intersezione di tale retta con il grafico. Ottengo (dato che la funzione e' iniettiva)
un unico punto P del piano cartesiano.
(Dato che il punto e' sulla retta orizzontale la sua ordinata =3 ; dato che e' sul grafico e' della forma $P=(x,f(x))$ con $f(x)=3$.

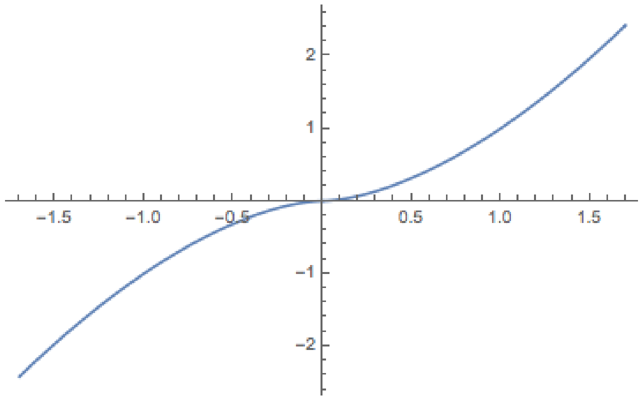
Il valore dell'ascissa di P e' per definizione **$f^{(-1)}(3)$.**

Potrei voler disegnare il grafico della funzione inversa come $x \rightarrow f^{(-1)}(x)$ (cioe' mettendo la variabile indipendente sull'asse delle ascisse che per convenzione si indica come asse x).

Dato il grafico di una funzione e' facile disegnare il grafico dell'inversa. Basta fare lo **speculare rispetto all'asse y=x**

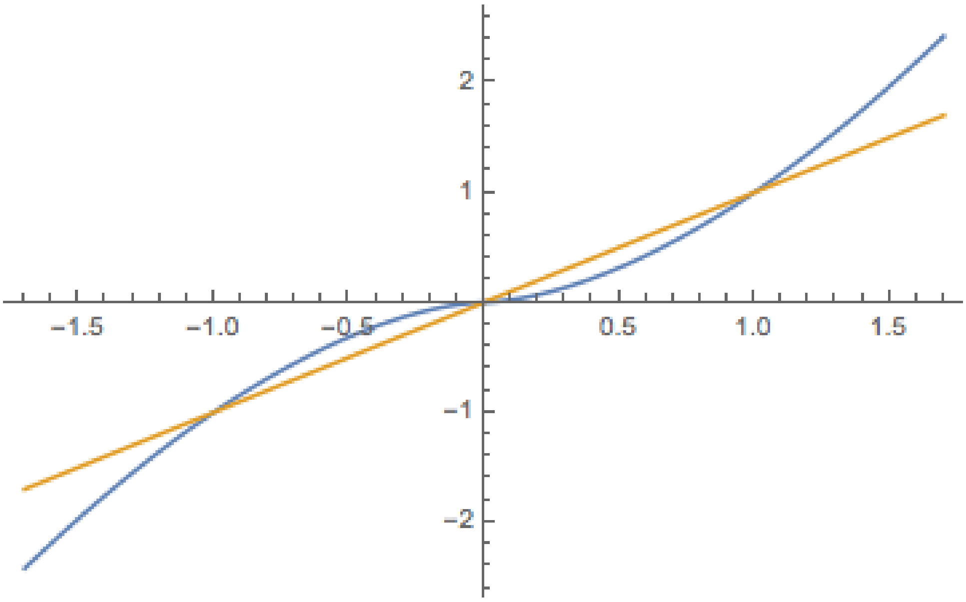
dato un punto o piu' in generale una figura sapete fare lo speculare rispetto ad un asse ?

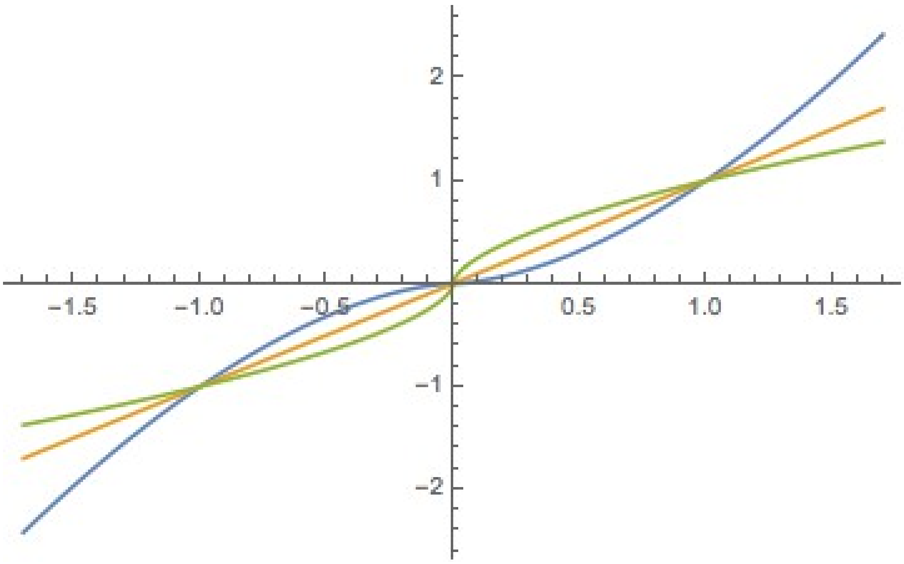
Prendiamo per esempio il grafico



Si vede facilmente che la funzione e' iniettiva

a questo punto possiamo fare lo speculare rispetto all'asse x=y. Basta tracciare l'asse e fare il simmetrico di un po di punti



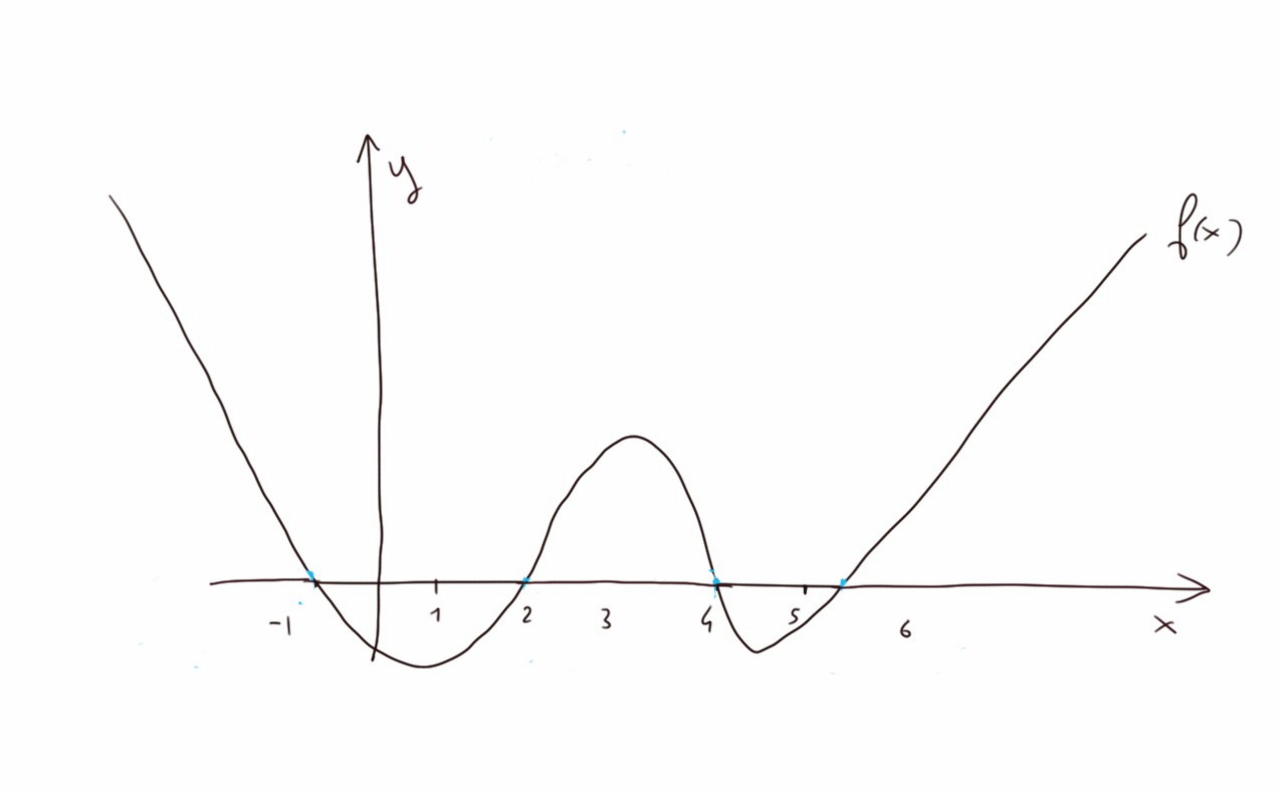


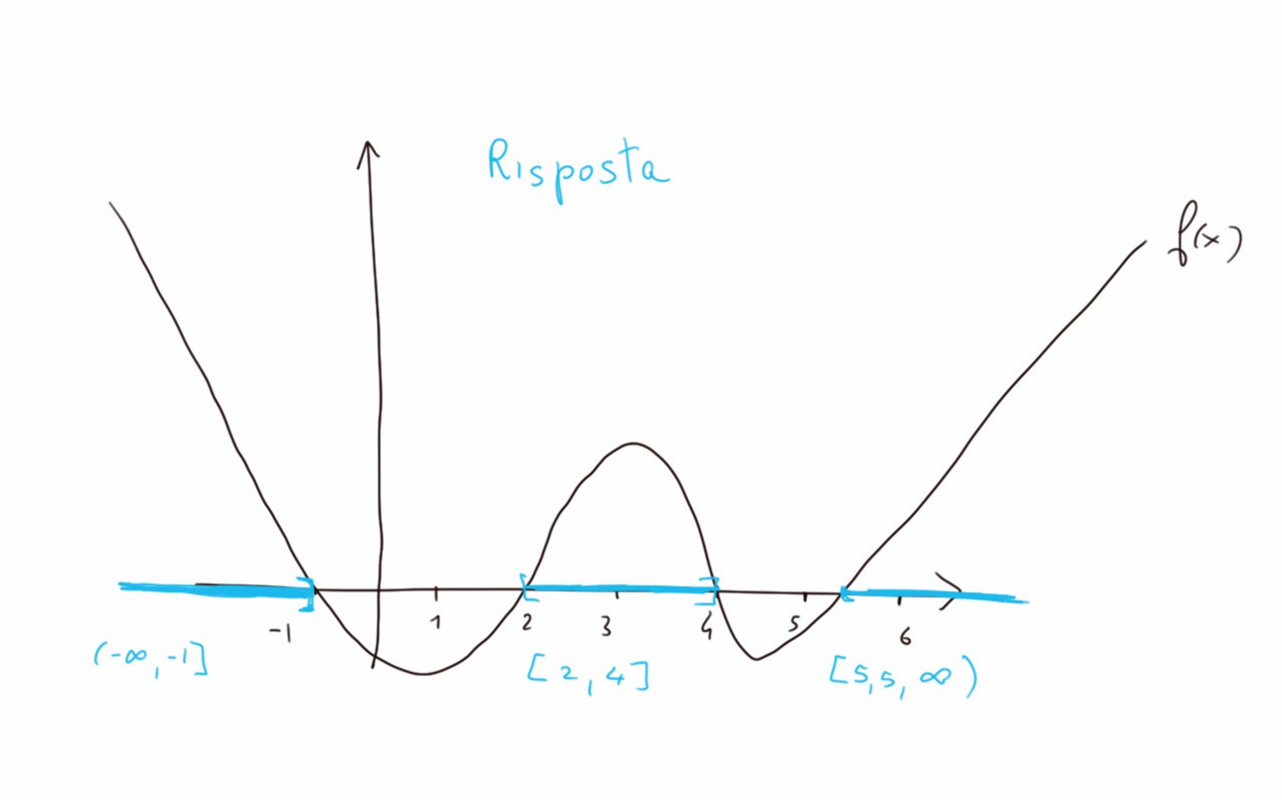
la funzione inversa e' tracciata in verde

Miscellanea sui grafici

Data la funzione f(x) il cui grafico e' rappresentato nella figura sottostante determinare

gli x tali che f(x)≥ 0

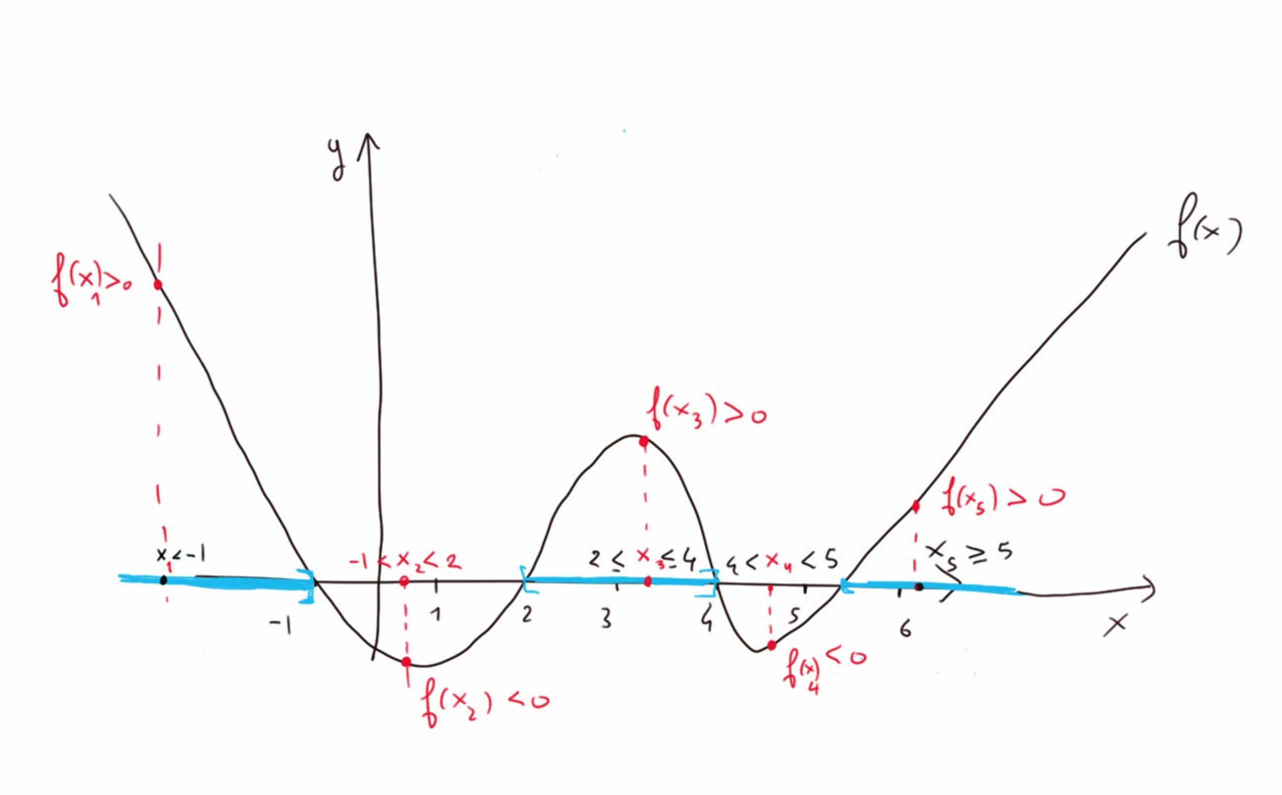




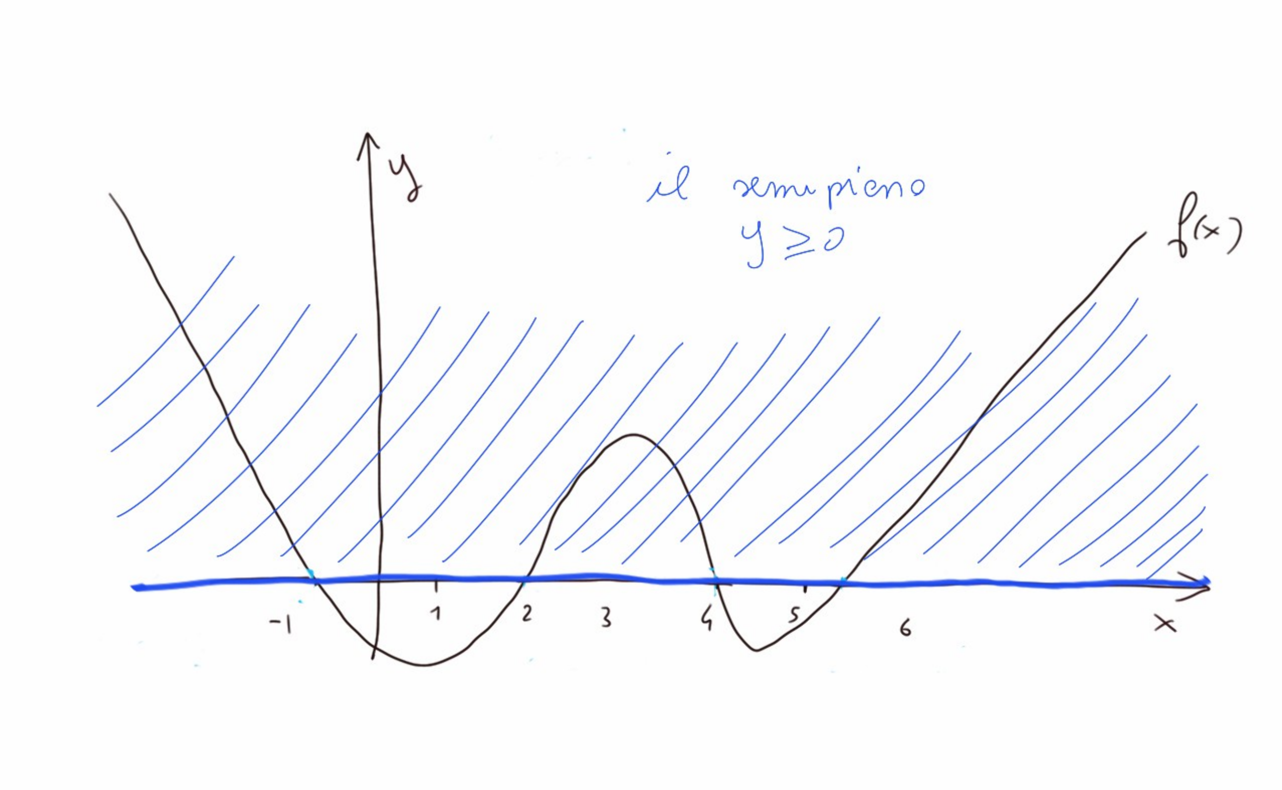
gli x tali che f(x)≥0 sono gli x tali che o x ≤ -1 o 2≤ x≤ 4 o x≥ 5,5

potete indicare anche come (-∞,-1] unione [2 , 4] unione [5,5 ,∞)

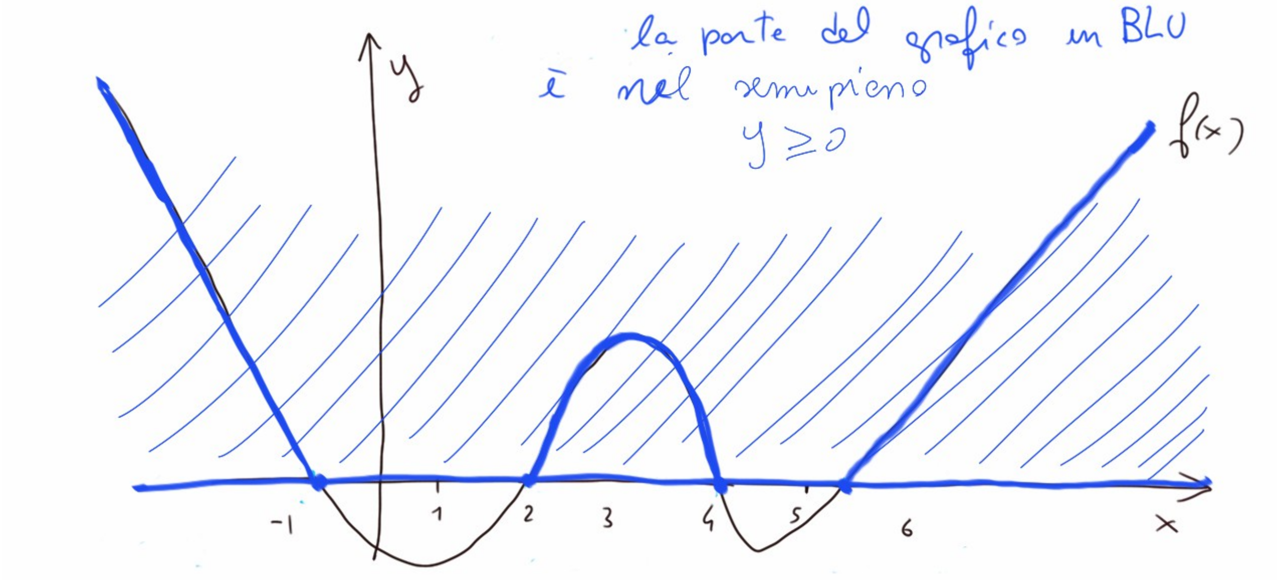
Potete convincervi che la risposta e' corretta scegliendo arbitrariamente dei punti negli insiemi scelti e verificando che f(x)≥ 0



Vogliamo gli x tali che y=f(x) sia nel **semipiano superiore**

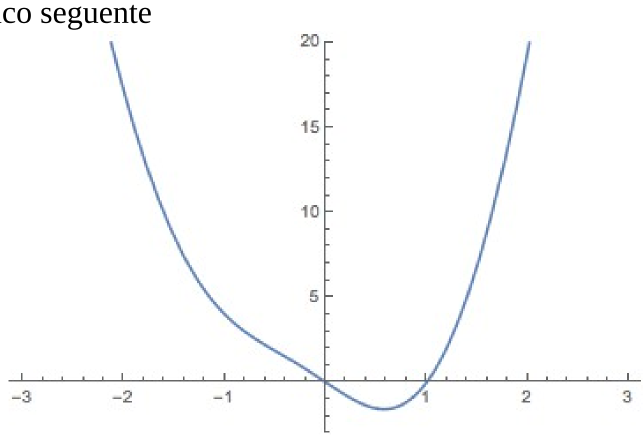


quindi determino le parti del grafico che si trovano nel semipiano superiore e poi determino le ascisse corrispondenti.



Ecco un altro esempio dato il grafico seguente determinare gli

x tali che $2<f(x)<5$



traccio le due rette orizzontali e determino la parte del grafico nella regione compresa fra le due rette