Grafico di funzioni razionali fratte

Esercizio 1. *Tracciare il grafico della seguente funzione:*

$$y = \frac{6\,x - 12}{x^2 - 6\,x + 9}\ .$$

Soluzione. Il dominio della funzione è

$$D_f = \{x \neq 3\}\ ;$$

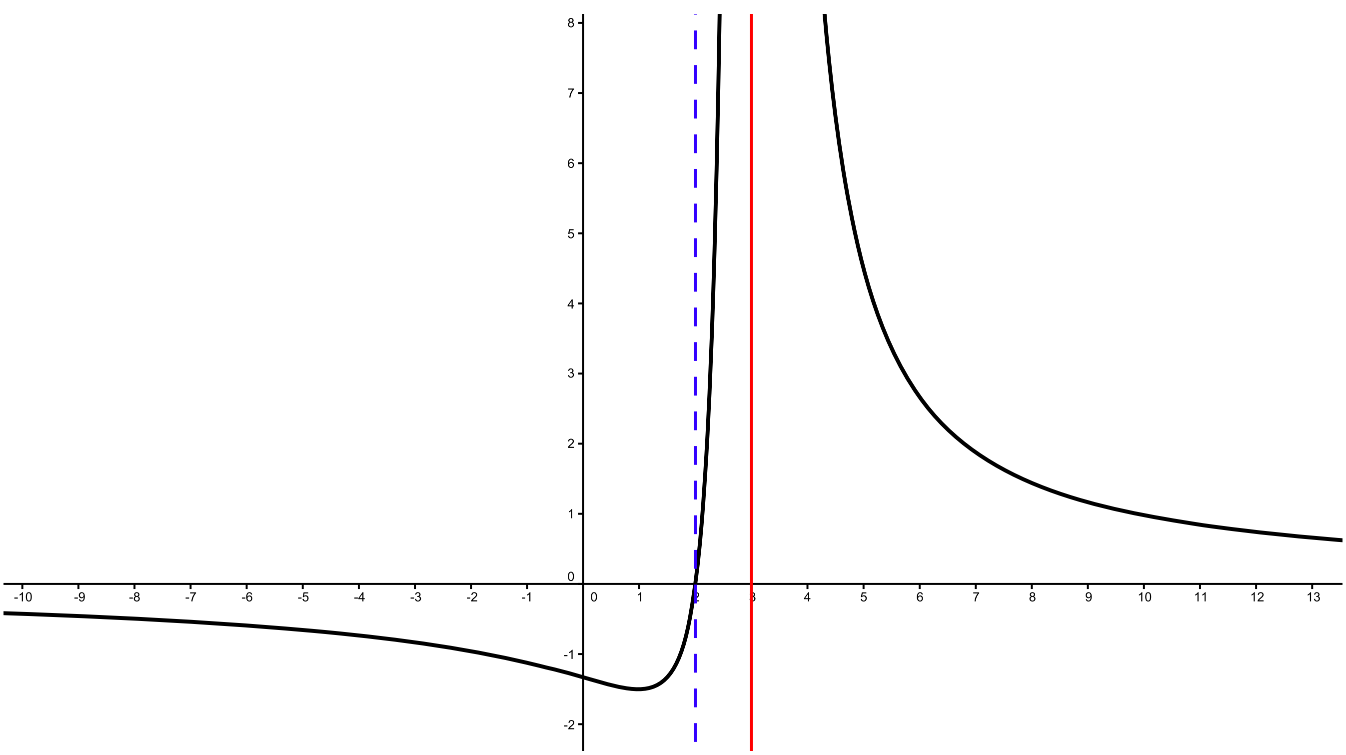
la funzione presenta uno zero per $x = 2$. Studiamo ora il segno della funzione:

$$N > 0 \quad \Rightarrow \quad 6\,x - 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad 6\,x > 12 \quad \Rightarrow \quad x > 2$$

$$D > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 6\,x + 9 > 0 \quad \Rightarrow \quad \{x < 3\} \cup \{x > 3\}$$

la funzione è positiva per $\{2 < x < 3\} \cup \{x > 3\}$. Poiché il grado del numeratore è minore del grado del denominatore, la funzione tende a zero per $|x|$ molto grande: la retta $y = 0$ è **asintoto orizzontale**. La retta $x = 3$ è **asintoto verticale** per la funzione.

Osservazione. Per $x < 2$ la funzione presenta un **minimo assoluto.**



Esercizio 2. *Tracciare il grafico della seguente funzione:*

$$y = \frac{1-x}{x^2-5\,x+6}\ .$$

Soluzione. Il dominio della funzione è

$$D_f = \{x \neq 2 \wedge x \neq 3\}\ ;$$

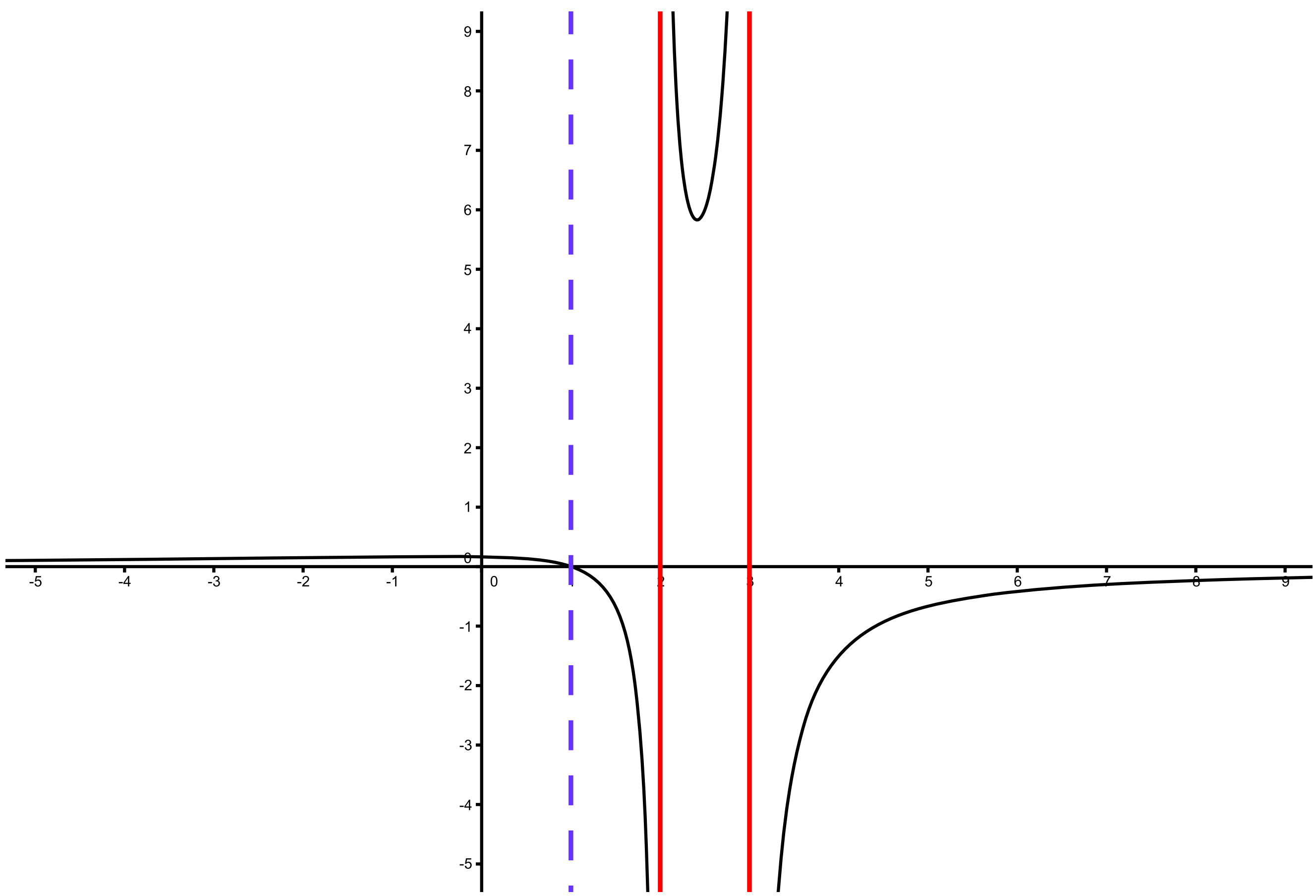
la funzione presenta uno zero per $x = 1$. Studiamo ora il segno della funzione:

$$N > 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - x > 0 \quad \Rightarrow \quad -x > -1 \quad \Rightarrow \quad x < 1$$

$$D > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5\,x + 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \{x < 2\} \cup \{x > 3\}$$

la funzione è positiva per $\{x < 1\} \cup \{2 < x < 3\}$. Poiché il grado del numeratore è minore del grado del denominatore, la funzione tende a zero per $|x|$ molto grande: la retta $y = 0$ è **asintoto orizzontale**. Le rette $x = 2$ e $x = 3$ sono **asintoti verticali** per la funzione.

Osservazione. La funzione presenta un **massimo relativo** per $x < 1$ e un **minimo relativo** per $2 < x < 3$.



Esercizio 3. *Tracciare il grafico della seguente funzione:*

$$y = \frac{2\,x - 1}{9 - x^2}\ .$$

Soluzione. Il dominio della funzione è

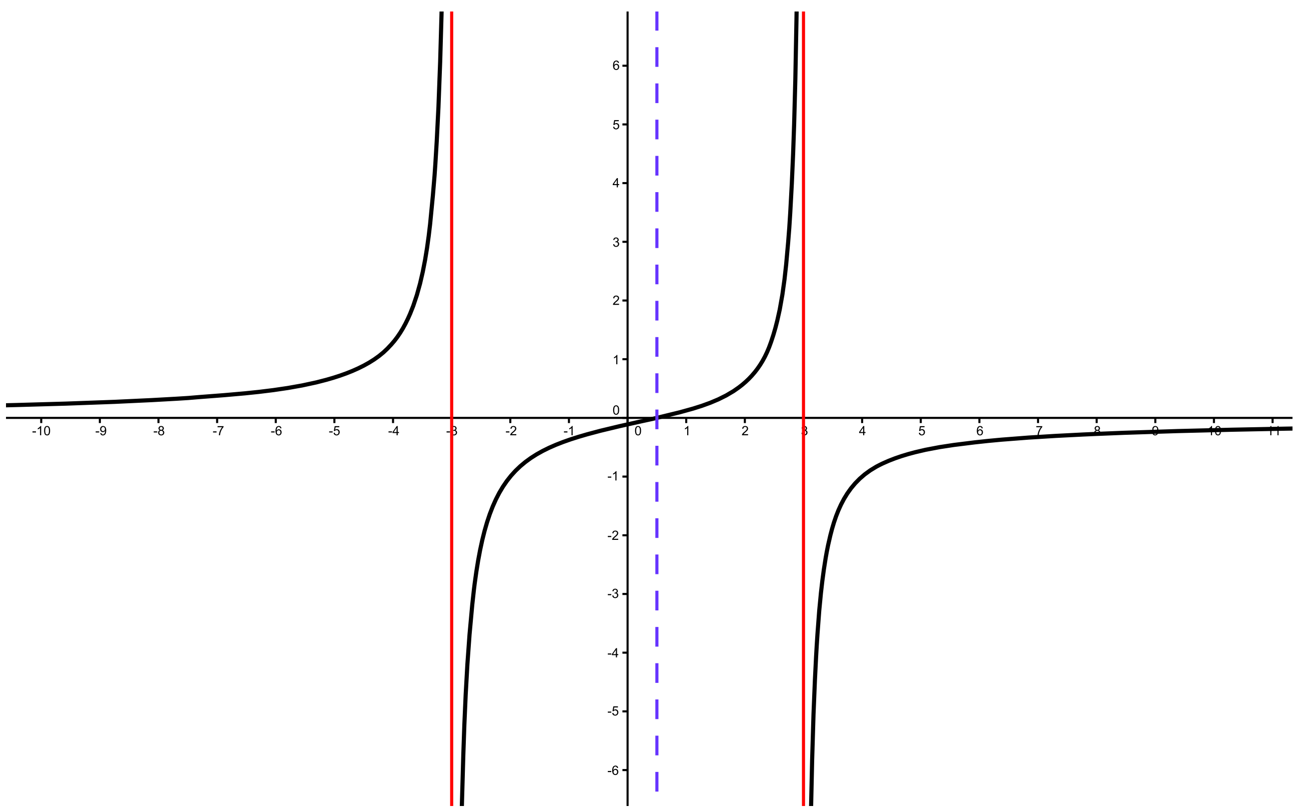
$$D_f = \{x \neq -3 \wedge x \neq 3\}\ ;$$

la funzione presenta uno zero per $x = \frac{1}{2}$. Studiamo ora il segno della funzione:

$$N > 0 \quad \Rightarrow \quad 2\,x - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad 2\,x > 1 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{1}{2}$$

$$D > 0 \quad \Rightarrow \quad 9 - x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \{-3 < x < 3\}$$

la funzione è positiva per $\{x < -3\} \cup \left\{\frac{1}{2} < x < 3\right\}$. Poiché il grado del numeratore è minore del grado del denominatore, la funzione tende a zero per $|x|$ molto grande: la retta $y = 0$ è **asintoto orizzontale**. Le rette $x = -3$ e $x = 3$ sono **asintoti verticali** per la funzione.



Esercizio 4. *Tracciare il grafico della seguente funzione:*

$$y = \frac{5\,x+5}{x^2+1}\ .$$

Soluzione. Il dominio della funzione è

$$D_f = \mathbb{R}\ ;$$

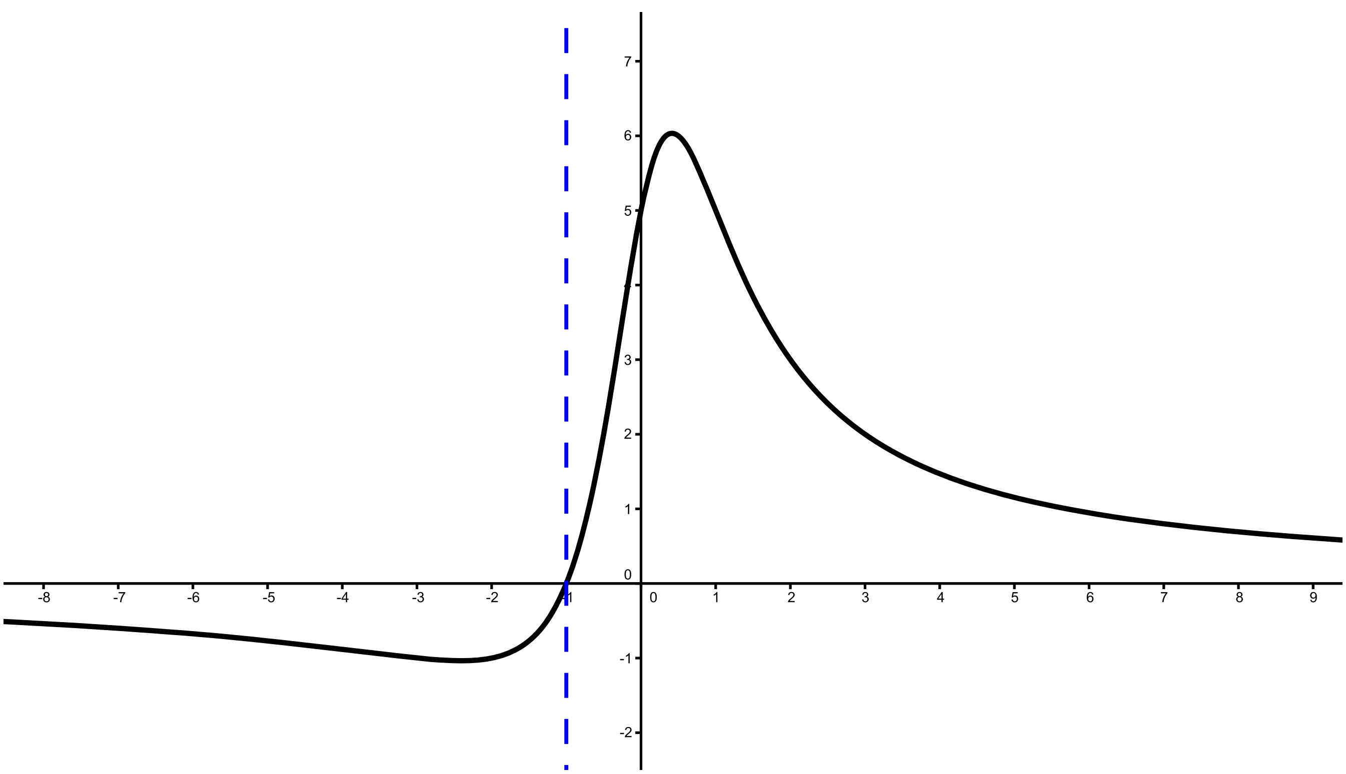
la funzione presenta uno zero per $x = -1$. Studiamo ora il segno della funzione:

$$N > 0 \quad\Rightarrow\quad 5\,x+5 > 0 \quad\Rightarrow\quad 5\,x > -5 \quad\Rightarrow\quad x > -1$$

$$D > 0 \quad\Rightarrow\quad x^2+1 > 0 \quad\Rightarrow\quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

la funzione è positiva per $\{x > -1\}$. Poiché il grado del numeratore è minore del grado del denominatore, la funzione tende a zero per $|x|$ molto grande: la retta $y = 0$ è **asintoto orizzontale**. Non ci sono asintoti verticali.

Osservazione. Per $x < -1$ la funzione presenta un **minimo assoluto**, mentre per $x > -1$ la funzione presenta un **massimo assoluto**.



Esercizio 5. *Tracciare il grafico della seguente funzione:*

$$y = \frac{24\,x - 45}{4\,x^2 - 24\,x + 32}\ .$$

Soluzione. Il dominio della funzione è

$$D_f = \{x \neq 2 \wedge x \neq 4\}\ ;$$

la funzione presenta uno zero per $x = \dfrac{15}{8}$. Studiamo ora il segno della funzione:

$$N > 0 \ \Rightarrow\ 24\,x - 45 > 0 \ \Rightarrow\ 24\,x > 45 \ \Rightarrow\ x > \frac{15}{8}$$

$$D > 0 \ \Rightarrow\ 4\,x^2 - 24\,x + 32 > 0 \ \Rightarrow\ \{x < 2\} \cup \{x > 4\}$$

la funzione è positiva per $\left\{\dfrac{15}{8} < x < 2\right\} \cup \{x > 4\}$. Poiché il grado del numeratore è minore del grado del denominatore, la funzione tende a zero per $|x|$ molto grande: la retta $y = 0$ è **asintoto orizzontale**. Le rette $x = 2$ e $x = 4$ sono **asintoti verticali** per la funzione.

Osservazione. Per $x < 2$ la funzione presenta un **minimo relativo**, mentre per $2 < x < 4$ la funzione presenta un **massimo relativo**.