Capitolo 1

Disequazioni

1.1. Definizioni

Una disequazione è una disuguaglianza fra due espressioni contenenti una o più incognite. Nel caso di una sola incognita, in particolare, si ha:

$$A(x) \gtreqless B(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Soluzioni della disequazione sono quei valori dell'incognita che rendono vera la disuguaglianza.

Due disequazioni si dicono equivalenti se ammettono le stesse soluzioni; valgono a questo proposito i seguenti due principi fondamentali:

1. Aggiungendo o togliendo ad entrambi i membri di una disequazione una stessa quantità (costante o variabile) si ottiene una disequazione equivalente a quella data:
$$A(x) > B(x) \Rightarrow A(x) + C(x) > B(x) + C(x)$$

2. Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disequazione per una stessa quantità (costante) positiva si ottiene una disequazione equivalente a quella data, moltiplicandoli o dividendoli per una stessa quantità (costante) negativa si ottiene una disequazione equivalente a quella data rovesciando il verso della disuguaglianza:
$$A(x) > B(x) \Rightarrow \begin{cases} c \cdot A(x) > c \cdot B(x) & \text{se} \quad c > 0 \\ c \cdot A(x) < c \cdot B(x) & \text{se} \quad c < 0 \end{cases}$$

Questi due principi vengono utilizzati per risolvere una disequazione, trasformando la disequazione iniziale in una più semplice, ad essa equivalente.

Esempio 1.1 *Risolvere la disequazione:*

$$x - 5 \geq 0$$

Aggiungendo la quantità (costante) $+5$ ad entrambi i membri si ottiene (sfruttando il 1° principio di equivalenza):

$$x - 5 + 5 \geq 0 + 5$$

cioè:

$$x \geq 5$$

che è la soluzione cercata.

Esempio 1.2 *Risolvere la disequazione:*

$$2x + 3 > x$$

Aggiungendo la quantità (variabile) $-x$ ad entrambi i membri si ottiene (sfruttando il 1° principio di equivalenza):

$$2x + 3 - x > x - x$$

cioè:

$$x + 3 > 0$$

e poi aggiungendo la quantità (costante) -3 ad entrambi i membri si ottiene (sfruttando ancora il 1° principio di equivalenza):

$$x + 3 - 3 > 0 - 3$$

cioè:

$$x > -3$$

che è la soluzione cercata.

Esempio 1.3 *Risolvere la disequazione:*

$$4x > 5$$

Moltiplicando entrambi i membri per la quantità (costante e positiva) $\frac{1}{4}$ si ottiene (sfruttando il 2° principio di equivalenza):

$$\frac{1}{4} \cdot 4x > \frac{1}{4} \cdot 5$$

cioè:

$$x > \frac{5}{4}$$

che è la soluzione cercata.

Esempio 1.4 *Risolvere la disequazione:*

$$-4x > 5$$

Moltiplicando entrambi i membri per la quantità (costante e negativa) $-\frac{1}{4}$ si ottiene (sfruttando il 2° principio di equivalenza e rovesciando la disuguaglianza):

$$\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-4x) < \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 5$$

cioè:

$$x < -\frac{5}{4}$$

che è la soluzione cercata.

In pratica, i due principi di equivalenza illustrati si applicano osservando che è possibile spostare un termine da un membro all'altro della disequazione a condizione di cambiarne il segno (1° principio) e che è possibile moltiplicare o dividere entrambi i membri della disequazione per una stessa quantità, tenendo presente che il verso della disuguaglianza va conservato se questa quantità è positiva mentre va rovesciato se questa quantità è negativa (2° principio).

Si possono a questo punto introdurre i principali tipi di disequazioni: razionali intere (di 1° e 2° grado), razionali fratte (e contenenti prodotti di polinomi), con valore assoluto, irrazionali, logaritmiche ed esponenziali, oltre ai sistemi di disequazioni.

1.2. Disequazioni razionali intere di 1° grado

Le disequazioni razionali intere di 1° grado si possono sempre ricondurre alla forma canonica:

$$ax + b \gtreqless 0 \qquad \text{con } a > 0$$

(se fosse $a < 0$ è sufficiente moltiplicare entrambi i membri della disequazione per -1 e cambiare verso alla disuguaglianza, riconducendosi così alla forma canonica con $a > 0$). Da questa forma si ottiene facilmente la soluzione, che è:

$$x \gtreqless -\frac{b}{a}$$

Esempio 1.5 *Risolvere la disequazione:*

$$4x - 12 > 0$$

In questo caso la disequazione si presenta già nella forma canonica, applicando i principi di equivalenza visti in precedenza si ottiene facilmente:

$$4x > 12$$

e poi:

$$x > 3$$

che è la soluzione.

Esempio 1.6 *Risolvere la disequazione:*

$$-4x - 12 > 0$$

In questo caso la disequazione non è scritta in forma canonica (in quanto $a < 0$), moltiplicando entrambi i membri per -1 (e rovesciando la disuguaglianza) si ottiene allora innanzitutto:

$$4x + 12 < 0$$

che è la disequazione scritta nella forma canonica (in quanto $a > 0$). Da questa si ricava poi facilmente (applicando i principi di equivalenza visti in precedenza):

$$4x < -12$$

e poi:

$$x < -3$$

che è la soluzione.

1.3. Disequazioni razionali intere di 2° grado

Le disequazioni razionali intere di 2° grado si possono sempre ricondurre alla forma canonica:

$$ax^2 + bx + c \gtreqless 0 \qquad \text{con } a > 0$$

(se fosse $a < 0$ è sufficiente moltiplicare entrambi i membri della disequazione per -1 e cambiare verso alla disuguaglianza, riconducendosi così alla forma canonica con $a > 0$). Per risolvere una disequazione di questo tipo si considera innanzitutto l'equazione di 2° grado associata:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

e se ne calcolano le radici x_1 e x_2 (dove si ipotizza $x_1 < x_2$ nel caso di radici distinte).

Vale a questo punto la seguente regola:

- Per valori di x esterni all'intervallo avente per estremi le radici (cioè per $x < x_1$ e per $x > x_2$) il trinomio $ax^2 + bx + c$ ha lo stesso segno del coefficiente del termine di grado massimo (cioè ha lo stesso segno di a).
- Per valori di x interni all'intervallo avente per estremi le radici (cioè per $x_1 < x < x_2$) il trinomio $ax^2 + bx + c$ ha il segno opposto a quello del coefficiente del termine di grado massimo (cioè ha segno opposto a quello di a).
- Per valori di x uguali alle radici (cioè per $x = x_1$ e per $x = x_2$) il trinomio $ax^2 + bx + c$ è nullo.

Più precisamente, tenendo presente che un'equazione di 2° grado può avere 2 radici reali distinte, 2 radici reali coincidenti oppure nessuna radice reale, si possono distinguere i seguenti 3 casi:

1. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. In questo caso l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$ possiede 2 radici reali distinte x_1, x_2 (dove si ipotizza $x_1 < x_2$) e per il trinomio $ax^2 + bx + c$ si ha:

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad \text{per} \qquad x < x_1 \quad \vee \quad x > x_2$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \qquad \text{per} \qquad x_1 < x < x_2$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{per} \qquad x = x_1 \quad \vee \quad x = x_2$$

2. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. In questo caso l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$ possiede 2 radici reali coincidenti $x_1 = x_2$ e per il trinomio $ax^2 + bx + c$ si ha:

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad \text{per} \qquad x \neq x_1, x_2$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{per} \qquad x = x_1, x_2$$

3. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. In questo caso l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$ non possiede radici reali e per il trinomio $ax^2 + bx + c$ si ha:

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

La regola prima enunciata risulta quindi valida in generale, tenendo presente che se $\Delta = 0$ tutti i valori di x diversi dalle radici $x_1 = x_2$ sono da considerarsi esterni all'intervallo avente per estremi le radici stesse (e quindi non vi sono valori di x interni a tale intervallo), mentre se $\Delta < 0$ tutti i valori di x sono da considerarsi esterni all'intervallo avente per estremi le radici (intervallo che risulta in realtà essere vuoto, non essendovi tali radici, per cui anche in questo caso non vi sono valori di x interni ad esso).

Esempio 1.7 *Risolvere la disequazione:*

$$x^2 - 2x - 8 > 0$$

In questo caso la disequazione si presenta già nella forma canonica, inoltre l'equazione associata:

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

possiede due radici reali distinte $x_1 = -2$ e $x_2 = 4$. Applicando la regola vista sopra si ha che la soluzione della disequazione è data da:

$$x < -2 \quad \vee \quad x > 4$$

Esempio 1.8 *Risolvere la disequazione:*

$$-x^2 + 2x + 8 > 0$$

In questo caso la disequazione non è scritta in forma canonica, conviene allora innanzitutto riscriverla in modo da ricondursi a tale forma; moltiplicando entrambi i membri per -1 (e rovesciando la disuguaglianza) si ottiene:

$$x^2 - 2x - 8 < 0$$

la cui equazione associata (la stessa dell'esercizio precedente) ha radici $x_1 = -2$ e $x_2 = 4$. Applicando la regola vista sopra si ha che la soluzione della disequazione è data da:

$$-2 < x < 4$$

Esempio 1.9 *Risolvere la disequazione:*

$$-6x^2 + 36x < 0$$

Riscrivendo la disequazione in forma canonica si ottiene innanzitutto:

$$6x^2 - 36x > 0$$

la cui equazione associata:

$$6x^2 - 36x = 0$$

ha radici $x_1 = 0$ e $x_2 = 6$. La disequazione ha allora soluzione data da:

$$x < 0 \quad \vee \quad x > 6$$

Esempio 1.10 *Risolvere la disequazione:*

$$x^2 \geq 9$$

Conviene innanzitutto ricondursi alla forma canonica scrivendo la disequazione nella forma:

$$x^2 - 9 \geq 0$$

dopodiché si osserva che l'equazione associata:

$$x^2 - 9 = 0$$

possiede radici $x_1 = -3$ e $x_2 = 3$. La disequazione ha allora soluzione data da:

$$x \leq -3 \quad \vee \quad x \geq 3$$

Esempio 1.11 *Risolvere la disequazione:*

$$x^2 - 2x + 1 < 0$$

In questo caso l'equazione associata:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

ha due radici reali coincidenti $x_1 = x_2 = 1$, applicando la regola vista sopra si ha allora che la disequazione non è mai soddisfatta (lo stesso risultato può essere ottenuto osservando che il primo membro della disequazione non è altro che $(x-1)^2$ che, essendo un quadrato, non potrà mai essere < 0).

Esempio 1.12 *Risolvere la disequazione:*

$$6x^2 + 5 > 0$$

In questo caso l'equazione associata:

$$6x^2 + 5 = 0$$

non possiede radici reali, applicando la regola vista sopra si ha allora che la disequazione è soddisfatta $\forall x \in \mathbb{R}$ (lo stesso risultato può essere ottenuto osservando che il primo membro della disequazione è la somma di un termine non negativo, $6x^2$, e di un termine positivo, 5, quindi è strettamente positivo qualunque sia il valore di x, per cui la disequazione è sempre verificata).

1.4. Disequazioni razionali fratte

Le disequazioni razionali fratte sono quelle nelle quali l'incognita compare a denominatore di una frazione e si possono sempre ricondurre alla forma canonica:

$$\frac{N(x)}{D(x)} \gtreqqless 0$$

In questo caso occorre innanzitutto scartare i valori di x che annullano il denominatore della frazione $D(x)$ (in quanto una frazione con denominatore nullo perde significato), dopodiché si studia separatamente il segno di $N(x)$ e quello di $D(x)$ e, combinandoli attraverso la "regola dei segni", si determina il segno della frazione, risolvendo così la disequazione.

Esempio 1.13 *Risolvere la disequazione:*

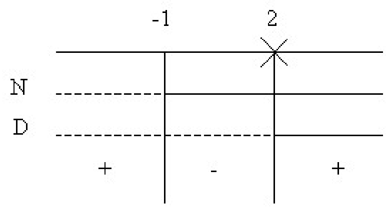
$$\frac{x+1}{4x-8} > 0$$

Deve essere innanzitutto $4x - 8 \neq 0$, da cui $x \neq 2$ (condizione di realtà della frazione). Studiando separatamente il segno del numeratore e quello del denominatore della frazione si ha poi:

$$N(x) > 0 \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

$$D(x) > 0 \Rightarrow 4x - 8 > 0 \Rightarrow x > 2$$

Il segno di $N(x)$ e di $D(x)$, insieme a quello globale della frazione, può essere rappresentato graficamente nel modo seguente (dove la linea continua indica gli intervalli in cui il segno è positivo e la linea tratteggiata gli intervalli in cui il segno è negativo, mentre la croce indica il valore escluso dal campo di esistenza):



Dall'analisi di questo grafico si ha che la soluzione della disequazione è data da:

$$x < -1 \quad \vee \quad x > 2$$

Esempio 1.14 *Risolvere la disequazione:*

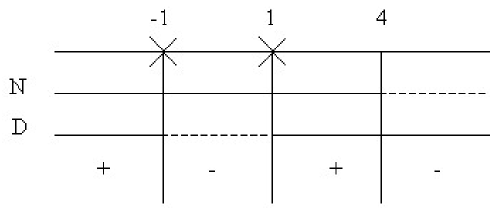
$$\frac{-x+4}{x^2-1} \leq 0$$

Deve essere innanzitutto $x^2 - 1 \neq 0$, da cui $x \neq \mp 1$ (condizione di realtà della frazione). Studiando il segno del numeratore e del denominatore della frazione si ha poi:

$$N(x) \geq 0 \Rightarrow -x+4 \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$$

$$D(x) > 0 \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x < -1 \quad \vee \quad x > 1$$

e graficamente:



per cui la soluzione della disequazione è data da:

$$-1 < x < 1 \quad \vee \quad x \geq 4$$

Poiché il segno di un prodotto segue le stesse regole del segno di un rapporto, lo stesso procedimento visto per risolvere le disequazioni razionali fratte può essere utilizzato anche per risolvere disequazioni contenenti solo prodotti di polinomi. In questo caso si studiano separatamente i segni dei singoli fattori e poi, combinandoli come visto in precedenza, si determina il segno del prodotto, risolvendo così la disequazione.

Esempio 1.15 *Risolvere la disequazione:*

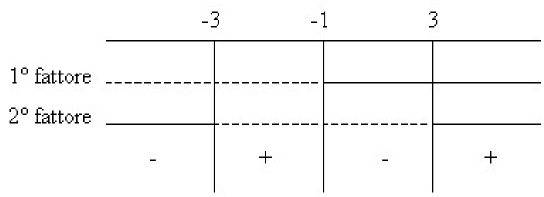
$$(x+1)(x^2-9) > 0$$

Studiando separatamente il segno di ciascuno dei due fattori si ottiene:

$$1^\circ \text{ fattore} > 0 \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

$$2^\circ \text{ fattore} > 0 \Rightarrow x^2-9 > 0 \Rightarrow x < -3 \quad \vee \quad x > 3$$

e combinandoli graficamente:



per cui la soluzione della disequazione è data da:

$$-3 < x < -1 \quad \vee \quad x > 3$$

Esempio 1.16 *Risolvere la disequazione:*

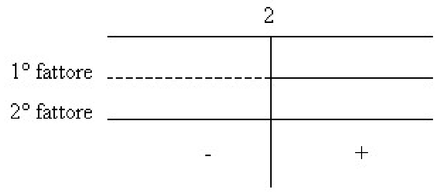
$$(x-2)(x^2-x+1) \leq 0$$

Studiando separatamente il segno di ciascuno dei due fattori si ottiene:

$$1^\circ \text{ fattore} \geq 0 \Rightarrow x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

$$2^\circ \text{ fattore} \geq 0 \Rightarrow x^2-x+1 \geq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

e combinandoli graficamente:



per cui la soluzione della disequazione è data da:

$$x \leq 2$$